제 1 장

공리계로서의 실수 집합

1.1 실수계의 구축 과정

보조정리 1.1 (절대값)**.**
$x \in \mathbb{R}$ 의 절대값(absolute value) $|x|$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \tag{1.1}$$

정리 1.2 (절대값의 성질)**.**
x, y 및 k 가 임의의 실수라 하자.

(i) $|x| \geq 0,\ |x| = 0 \iff x = 0.$

(ii) $|kx| = |k||x|.$

(iii) (삼각부등식) $\left|x+y\right| \leq |x| + \left|y\right|$. 단, 등호는 $xy \geq 0$ 일 때만 성립한다.

정리 1.3 (테일러 급수의 유일성)**.**
f 가 $x = x_0$ 에서 급수 전개가능하면 f 의 테일러 급수는 유일하다.

증명 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ 라고 가정하자. 모든 $n \geq 0$ 에 대해 $a_n = b_n$ 임을 보이면 되는데 다음을 증명하면 충분하다.

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(x-x_0)^n \equiv 0 \Rightarrow a_n - b_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \tag{1.2}$$

함수 g 가 수렴반경이 $R \neq 0$ 인 멱급수에 의해 정의되므로 항별미분이 가능하다. 항별미분한 후 x_0 을 대입하면 모든 정수 $n \geq 0$ 에 대해 $a_n = b_n$ 임을 알 수 있다. □

(1.1) 에 의해 $|-3| = -(-3) = 3$ 이다.