QoLT 문제들

August 31, 2012

차례

1. 함수와 극한
   - 함수와 그 표현
   - 함수의 극한
   - 극한 셈

문제 1.1.1.

다음 함수의 정의역을 찾아라.

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

풀이 1.

먼저 다음을 따져보자.

(1) 정의역은 실수 전체이다.

(2) 정의역은 실수 전체가 아니다.

문제 1.1.1.

다음 함수의 정의역을 찾아라.

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

풀이 2.

정의역은 실수 전체가 아니다. 그 이유는 $g(x)$가 정의될 수 있는 x의 값이 존재하기 때문이다. 이를 확인하기 위해 식을 좀 더 간단한 형태로 변형해보자.

(1) $g(x) = \frac{1}{x(x-1)}$

(2) $g(x) = \frac{1}{x^2}$

(3) $g(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

문제 1.1.1.

다음 함수의 정의역을 찾아라.

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

풀이 3.

이는 식 $x^2 - x$가 $x(x-1)$로 간단히 인수분해될 수 있다는 사실로부터 나온다.

이제 $g(x)$의 분모가 0이 될 수 없다는 사실을 고려하면 x는 다음 조건을 만족시켜야 한다.

(1) $x \neq 0, x \neq 1$

(2) $x \neq -1, x \neq 0$

(3) $x \neq -1, x \neq 1$

문제 1.1.1.

다음 함수의 정의역을 찾아라.

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

풀이 4.

$x(x-1) \neq 0$이므로 $x \neq 0, x \neq 1$가 성립해야 한다. 즉 x가 0과 1일 때에는 $g(x)$가 정의될 수 없다. 반면 이 두 수를 제외한 모든 수에서는 $g(x)$가 정의될 수 있다. 따라서 g의 정의역은 $\{x | x \neq 0, x \neq 1\}$이다. 이것을 다시 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$로도 쓸 수 있다.

문제 1.3.1.
헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t<0$일 때 $H(t)=0$, $t\geq 0$일 때 $H(t)=1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한을 구하고, 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 1.
H의 0에서의 좌극한과 우극한은 각각 기호로 다음과 같이 쓸 수 있다.

(1) 좌극한 : $\lim_{t\to 0^-} H(t)$, 우극한 : $\lim_{t\to 0^+} H(t)$

(2) 좌극한 : $\lim_{t\to 0^+} H(t)$, 우극한 : $\lim_{t\to 0^-} H(t)$

문제 1.3.1.

헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t<0$일 때 $H(t)=0$, $t\geq 0$일 때 $H(t)=1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한을 구하고, 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 2.

먼저 좌극한 $\lim_{t\to 0^-} H(t)$를 구해보자. t가 왼쪽에서 0으로 가까워지는 동안 t는 다음 조건을 만족한다.

(1) $t<0$

(2) $t\geq 0$

문제 1.3.1.
헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t<0$일 때 $H(t)=0$, $t\geq 0$일 때 $H(t)=1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한을 구하고, 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 3.
$t<0$이므로 H의 정의에 의해 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{t\to 0^-} H(t) = \lim_{t\to 0^-} 0 = 0$

(2) $\lim_{t\to 0^-} H(t) = \lim_{t\to 0^-} 1 = 1$

문제 1.3.1.

헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t<0$일 때 $H(t)=0$, $t\geq 0$일 때 $H(t)=1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한을 구하고, 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 4.

$t<0$일 때의 H의 함숫값인 $H(t)=0$을 대입하면 H의 0에서의 좌극한 값이 0이라는 것을 알 수 있다.

이번에는 우극한 $\lim_{t\to 0^+} H(t)$를 구해보자. t가 오른쪽에서 0으로 가까워지는 동안 t는 다음 조건을 만족한다.

(1) $t<0$

(2) $t\geq 0$

문제 1.3.1.

헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t<0$일 때 $H(t)=0$, $t\geq 0$일 때 $H(t)=1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한, 그리고 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 5.

$t\geq 0$이므로 헤비사이드 함수의 정의에 의해 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{t\to 0^+} H(t) = \lim_{t\to 0^+} 0 = 0$

(2) $\lim_{t\to 0^+} H(t) = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1$

문제 1.3.1.

헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t < 0$일 때 $H(t) = 0$, $t \geq 0$일 때 $H(t) = 1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한을 구하고, 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 6.

$t \geq 0$일 때의 H의 함숫값인 $H(t) = 1$을 대입하면 H의 0에서의 우극한 값이 1이라는 것을 알 수 있다. 이번에는 H의 0에서의 극한값이 존재하는지를 따져보자.

문제 1.3.1.
헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t < 0$일 때 $H(t) = 0$, $t \geq 0$일 때 $H(t) = 1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한을 구하고, 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 7.
우리는 다음과 같은 사실을 안다.

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim_{x\to a} f(x) = L\text{이기 위한 필요충분조건은} \\ \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L\text{이다.}\end{array}}$$

문제 1.3.1.
헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t<0$일 때 $H(t)=0$, $t\geq 0$일 때 $H(t)=1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한을 구하고, 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 8.
그리고 우리는 $\lim_{t\to 0+} H(t) = 0 \neq 1 = \lim_{t\to 0+} H(t)$ 라는 사실을 알고 있다.
따라서 H의 0에서의 극한값 $\lim_{t\to 0} H(t)$은

(1) 존재한다.

(2) 존재하지 않는다.

문제 1.3.1.

헤비사이드 함수 H의 함숫값 $H(t)$는 $t < 0$일 때 $H(t) = 0$, $t \geq 0$일 때 $H(t) = 1$로 정의된다. H의 0에서의 좌극한과 우극한을 구하고, 0에서의 극한값이 존재하는지의 여부를 밝혀라.

풀이 9.

좌극한과 우극한이 일치하지 않기 때문에 극한값은 존재하지 않는다.
다시 정리해보자. H의 0에서의 좌극한과 우극한은 각각 존재하며 그 값은 0과 1이다. 이를 식으로 쓰면

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0, \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

이다. 한편 좌극한과 우극한이 일치하지 않으므로 H의 0에서의 극한값은 존재하지 않는다.

문제 1.4.1.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$의 값을 구하여라.

풀이 1.

먼저 다음을 살펴보자.

(1) 이 극한값을 구하려면 식 $\frac{\sin 7x}{4x}$에 그대로 $x = 0$을 대입하면 된다.

(2) 식 $\frac{\sin 7x}{4x}$에 $x = 0$을 대입하는 것은 불가능하다.

문제 1.4.1.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$의 값을 구하여라.

풀이 2.

식 $\frac{\sin 7x}{4x}$에 그대로 $x = 0$을 대입할 수는 없다. 분모가 0이 되기 때문이다. 우리가 유용하게 사용할 수 있는 사실은

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \boxed{?}$$

이다.

(1) -1

(2) 0

(3) 1

문제 1.4.1.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$ 의 값을 구하여라.

풀이 3.

$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ 을 적용하기 위해서, 먼저 $\frac{\sin 7x}{4x}$ 에 다음과 같이 7을 곱하고 7로 나누자.

$$\frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{7}\left(\frac{\sin 7x}{4x}\right) = \boxed{?}$$

(1) $\frac{7}{7}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$

(2) $\frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$

(3) $\frac{4}{7}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$

문제 1.4.1.

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$의 값을 구하여라.

풀이 4.

간단한 계산으로 $\frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$를 얻을 수 있다.

한편, $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$를 잘 이용하면 다음이 성립한다.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 0$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{4}{7}$

문제 1.4.1.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$의 값을 구하여라.

풀이 5.

x가 0으로 접근할 수록 $7x$도 0으로 접근하므로 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \lim_{7x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x}$이고 $\theta = 7x$로 보아서 아까의 식에 적용하면 $\lim_{7x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$이 성립하기 때문이다.

문제 1.4.1.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$ 의 값을 구하여라.

풀이 6.

이제 $\frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$ 와 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1$ 를 종합하면

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right) \overset{*}{=} \frac{7}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$

를 얻을 수 있다. $*$에서 사용한 극한법칙은

(1) 합의 극한법칙

(2) 상수배의 극한법칙

(3) 거듭제곱의 극한법칙

이다.

문제 1.4.1.

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$ 의 값을 구하여라.

풀이 7.

상수배의 극한법칙이

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$$

이었다는 사실을 상기하자. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x}$ 의 값이 존재하므로 이 법칙을 적용할 수 있는 것이다. 물론 $\lim_{x\to 0} \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$ 이므로 곱의 극한법칙을 적용했다고 말해도 상관 없다.

따라서 이 문제의 답은 $\frac{7}{4}$ 이다.

문제 1.4.2.

$\lim_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 1.

먼저 다음을 살펴보자.

(1) 이 극한값을 구하려면 식 $\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 에 그대로 $x=7$ 을 대입하면 된다.

(2) 식 $\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 에 $x=7$ 을 대입하는 것은 불가능하다.

문제 1.4.2.

$\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 2.

식 $\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 에 그대로 $x=7$을 대입하는 것은 불가능하다. 분모가 0이 되기 때문이다.

따라서 이 식에 대한 약간의 대수적 조작이 필요하다. 주어진 식을 조금 변형해보자.

(1) $\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\frac{x+2}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$

(2) $\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$

(3) $\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\frac{x+3}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$

문제 1.4.2.

$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 3.

이때 사용한 방법은, 분자와 분모에 모두 $\sqrt{x+2}+3$를 곱하는 것이다. 분자와 분모에 모두 $\sqrt{x+2}+3$를 곱하면

$$\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \frac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$$
$$\stackrel{*}{=} \frac{\sqrt{x+2}^2-3^2}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \frac{(x+2)-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$$

가 되기 때문이다. 이런 방식으로 근호를 없애는 방법을 ‘유리화’라고 부른다.

문제 1.4.2.

$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 4.

이 경우에는 분자의 근호를 없앴으므로 '분자의 유리화' 라고 말할 수 있다.

계산과정에서 $*$에서 사용한 공식은

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(3) $(a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

이다.

문제 1.4.2.

$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 5.

이제 $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 에 $\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$ 를 대입하면

$$\lim_{x\to 7} \frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \lim_{x\to 7} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3}$$

를 얻을 수 있다. 이때 $\lim_{x\to 7} 1 = \boxed{?}$ 임은 당연하다.

(1) -1

(2) 0

(3) 1

이다.

문제 1.4.2.

$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 6.

1 을 다항식의 일종으로 볼 수 있기 때문에 직접대입성질을 적용할 수 있기 때문이다. 또 $\lim_{x\to 7} \sqrt{x+2} + 3 = \boxed{?}$ 가 성립한다.

(1) 0

(2) 3

(3) 6

이다.

문제 1.4.2.

$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 7.

$$\lim_{x\to 7}(\sqrt{x+2}+3) = \left(\lim_{x\to 7}\sqrt{x+2}\right)+3 = \left(\sqrt{\lim_{x\to 7}(x+2)}\right)+3$$
$$= (\sqrt{7+2}))+3 = 6$$

이기 때문이다. 합의 극한법칙과 거듭제곱근 극한법칙, 다항식의 직접대입성질 등을 사용했다는 사실을 관찰하자.

문제 1.4.2.

$\lim_{x\to7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 8.

이제 분자와 분모의 극한값이 모두 존재하므로 $\lim_{x\to7} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3}$ 에 $\boxed{?}$을 사용할 수 있다.

(1) 차의 극한법칙

(2) 몫의 극한법칙

(3) 거듭제곱 극한법칙

문제 1.4.2.

$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$ 를 계산하여라.

풀이 9.

즉

$$\lim_{x\to 7} \frac{1}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{\lim_{x\to 7} 1}{\lim_{x\to 7}(\sqrt{x+2}+3)} = \frac{1}{6}$$

이다. 따라서 답은 $\frac{1}{6}$ 이다.

[1] James Stewart
Essential Calculus

[2] 수학교재편찬위원회
미분적분학