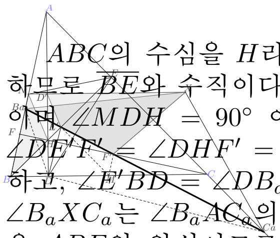
삼각형 ABC가 있다. A, B, C에서 대변에 내린 수선의 발을 D, E, F라 하고, AD, BE, CF의 중점을 D', E', F'이라 하고, 직선 $E'F'$가 AB, AC와 만나는 점을 각각 B_a, C_a라 하고, 직선 $F'D'$가 BC, BA와 만나는 점을 각각 C_b, A_b라 하고, 직선 $D'E'$가 CA, CB와 만나는 점을 각각 A_c, B_c라 하고, 삼각형 $AB_aC_a, BC_bA_b, CA_cB_c$의 외심을 각각 X, Y, Z라 하자. 여섯개의 점 D', E', F', X, Y, Z가 한 원 위에 있음을 증명하여라.

관찰. 두 선분 BE, CF의 중점이 주어져 있으므로 닮음을 이용하기 위해 닮음의 중심을 생각한다. BE, B_aC_a, CE의 닮음의 중심은 D임을 알 수 있다.
풀이.



ABC의 수심을 H라 하고 $\overline{BC}$의 중점을 M이라 하자. $\overline{ME'}$가 $\overline{CE}$와 평행하므로 $\overline{BE}$와 수직이다. 따라서 $\angle ME'H = 90°$, 마찬가지로 $\angle MF'H = 90°$이며 $\angle MDH = 90°$ 이므로 $DHE'F'M$은 한 원 위에 있다. 이를 이용하면 $\angle DE'F' = \angle DHF' = \angle B = \angle DEC$이므로 $BDE'B_a, EE'DC_a$가 원에 내접하고, $\angle E'BD = \angle DB_aE', \angle DEE' = \angle E'C_aD$ 이므로$BDE \sim B_aDC_a$ 이다. $\angle B_aXC_a$는 $\angle B_aAC_a$의 원주각이므로 $2\angle A$이다. $\overline{AB}$의 중점을 N이라 하면 N은 ABE의 외심이므로 BNE는 꼭지각의 크기가 $2\angle A$인 이등변삼각형이다. 따라서

$$BNE \sim B_aXC_a \Rightarrow DBNE \sim DB_aXC_a$$

즉 이 두 사각형에서 하나를 D를 중심으로 회전하고 확대하면 다른 하나를 얻을 수 있다. $\angle DF'B_a = \angle DHB$에서 $DHB \sim DF'B_a$이므로 위의 회전변환에서 H는 F'로 대응된다. 따라서

$$BHN \sim B_aF'X$$

$DBN \sim DB_aX$이므로 $DBB_a \sim DNX \Rightarrow \angle DNX = \angle B = \angle DND' \Rightarrow N, X, D'$는 한 직선 위에 있다. N에 대해서 M과 마찬가지 논증을 적용하면 $FHE'D'N$이 한 원 위에 있으므로 $\angle XF'E' = \angle NHB = \angle ND'E'$. 따라서 $D'E'F'X$가 한 원 위에 있음을 알 수 있다. Y, Z에 대해서도 마찬가지로 증명할 수 있다.