컨투어 적분

변정윤

목차

제 1 장

기초지식

1.1 컨투어 적분

이 절에서는 복소함수의 적분을 다룬다.

정의 1.1.1. 경로 적분, 컨투어, 컨투어 적분

$C : [a, b] \to \mathbb{C}$를 복소평면 위의 경로(path),[a] 즉 닫힌 구간으로부터 복소평면으로의 미분가능한 함수라 하자. C를 그림 1.1과 같이 n개의 조각으로 나누자. 즉, C가 매개변수화 $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ($z_0 = \gamma(a)$, $z_1 = \gamma(b)$)에 의하여 주어지고, $[a, b]$가 n개의 소구간 $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n]$ (단 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$)으로 나누어질 때 $z_i = x_i + iy_i = \gamma(t_i)$ ($i = 0, 1, \cdots, n$)라 하자.

$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$일 때, C 위에서의 함수 $f(z)$의 적분 $\int_C f(z)dz$를 다음과 같이 정의한다: $||P|| = \max_{1\le k\le n} |\Delta z_k|$이고 z_k^*는 C 위에서 z_{k-1}과 z_k 사이에 있는 임의의 점이며, $z_k^* = \gamma(t_k^*) = x(t_k^*) + iy(t_k^*)$ ($t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$)라 할 때,

$$\int_C f(z)dz = \lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k \tag{1.1}$$

$$= \lim_{||P||\to 0} \sum_{k=1}^{n} (u(t_k^*) + iv(t_k^*))(\Delta x + i\Delta y)$$

$$= \lim_{||P||\to 0} \left\{\sum (u(t_k^*)\Delta x - v(t_k^*)\Delta y) + i \sum (v(t_k^*)\Delta x + u(t_k^*)\Delta y)\right\}$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i \int_C (vdx + udy) \tag{1.2}$$

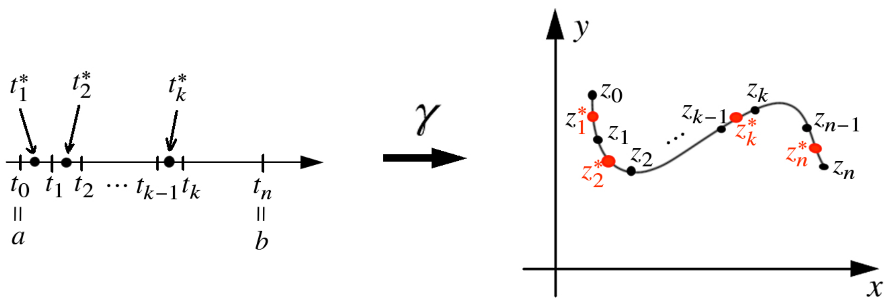
$$= \int_a^b \left(u(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} - v(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$+ i \int_a^b \left(v(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + u(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right) dt$$

$$= \int_a^b (u + iv)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right) dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{1.3}$$

위와 같은 복소평면 위의 경로 위에서의 복소함수의 적분을 **경로 적분**(path integral)이라 한다. 적분의 경로가 단순 닫힌 경로(simple closed path), 즉 두 번 지나는 점이 시작점과 끝점뿐인 닫힌 경로일 때 이 경로를 **컨투어**(contour)라 하고, 경로가 컨투어인 경로 적분을 **컨투어 적분**(contour integral)이라 한다.

[a] 실수의 집합 $\mathbb{R}$이나 그 부분집합을 다른 집합으로 보내는 함수를 **곡선**(curve) 또는 **경로**(path)라 한다. 대체로 속도나 접선같은 미분에 관련된 개념들이 강조될 때는 곡선이라는 용어가 선호된다.



t_1^*
t_2^*
t_k^*
t_0
a
t_1
t_2
$\cdots$
t_{k-1}
t_k
t_n
b
γ
y
x
z_0
z_1^*
z_1
z_2^*
z_2
z_{k-1}
z_k^*
z_k
z_{n-1}
z_n^*
z_n

그림 1.1

참고문헌

국문색인

영문색인